

# Unternehmensbewertung, Zahlenbeispiele und Jensens Ungleichung

## I. Einleitung

Zahlenbeispiele, die im Zusammenhang mit praxisorientierten Fragen der Unternehmensbewertung benutzt werden, lassen die Unsicherheit der verwendeten Daten regelmäßig im Dunkeln. Das kann zu nennenswerten Fehlinformationen führen, wenn auf der Grundlage derart unvollständiger Daten zukunftsbezogene Kennzahlen berechnet werden.

## II. Grundlagen

In der Literatur zur Unternehmensbewertung existieren zwei Stilrichtungen, wenn es darum geht, dass Autoren ihre Überlegungen dem Leser verständlich machen wollen. Eine (eher kleine) Minderheit von theoretisch argumentierenden Autoren beschränkt sich auf die Präsentation mathematischer Formeln, die große Mehrheit unterstützt die Lektüre mit Hilfe von Zahlenbeispielen. Diese Mehrheit vertritt die zweifellos zutreffende Meinung, dass Zahlenbeispiele insbesondere bei interessierten Praktikern sehr viel besser ankommen als abschreckende mathematische Gleichungen.

In Tab. 1 ist ein solches typisches Zahlenbeispiel wiedergegeben<sup>1)</sup>.

In Tab. 1 werden zukünftige freie Cash-flows aus den Brutto-Cash-flows, den Investitionen, den Zinsen und der Tilgung des Fremdkapitals berechnet. Wir gehen von einem gegenwärtigen Fremdkapital-

*Prof. Dr. Lutz Kruschwitz, Freie Universität Berlin; Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler, Universität Hannover. Beide Autoren danken dem Verein zur Förderung der Zusammenarbeit von Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V. für die finanzielle Unterstützung sowie einem Gutachter für seine Anmerkungen.*

Jahr	1	2	3	4 ff.
Brutto-Cash-flows	121,00	133,00	130,00	145,00
Investitionen	-10,00	-12,00	-9,00	-15,00
Zinsen	-10,00	-10,00	-10,00	-7,50
Tilgung	0,00	0,00	-50,00	0,00
freie Cash-flows	101,00	111,00	71,00	122,50

Tab. 1: Ein typisches Zahlenbeispiel zur Berechnung

1) Es handelt sich hier nicht um ein der Literatur entnommenes Beispiel, es wurde vielmehr der vorhandenen Literatur angelehnt.

bestand von  $D_0 = 200$  aus und unterstellen, dass die Kapitalkosten des Eigenkapitals konstant 10% betragen<sup>2)</sup>. Bezeichnet man mit  $E_0$  den Marktwert des Eigenkapitals (*equity value*), dann bekommt man für den gesamten Unternehmenswert (*entity value*) mit diesen Zahlen

$$V_0 = \frac{101}{1+10\%} + \frac{111}{(1+10\%)^2} + \frac{71}{(1+10\%)^3} + \frac{122,5}{10\%(1+10\%)^3} + 200 \quad (1)$$

$$= 1157,26 + 200,00 = 1357,26$$

Um die entsprechenden Werte für  $t = 1$  zu ermitteln, können wir der Tabelle entnehmen, dass der Fremdkapitalbestand unverändert bleibt, also  $D_1 = 200$ . Bei analoger Rechnung erhalten wir

$$V_1 = \frac{111}{1+10\%} + \frac{71}{(1+10\%)^2} + \frac{122,5}{10\%(1+10\%)^2} + 200 \quad (2)$$

$$= 1171,98 + 200,00 = 1371,98$$

Wir wollen uns nun für den Verschuldungsgrad des Beispielunternehmens interessieren und definieren diesen als das Verhältnis von Fremdkapital und Eigenkapital (*debt-equity-ratio*). Messen wir die jeweiligen Komponenten in Marktwerten, so bekommen wir

$$L_0 = \frac{D_0}{E_0} = \frac{200,00}{1157,26} = 0,1728 \quad \text{und} \quad L_1 = \frac{D_1}{E_1} = \frac{200,00}{1171,98} = 0,1707 \quad (3)$$

All diese Rechnungen scheinen unproblematisch zu sein. In Wirklichkeit ist aber mindestens eine unserer Berechnungen doch fragwürdig, nämlich die Ermittlung des für den Zeitpunkt  $t = 1$  erwarteten Verschuldungsgrads. Und genau die damit verbundenen Probleme wollen wir im Folgenden diskutieren.

### III. Zahlen und Zufallsvariablen

Wir beginnen damit, dass wir uns die Zahlen der Tab. 1 auf S. 419 etwas genauer anschauen. Alle dort wiedergegebenen Zahlen beziehen sich auf die Zukunft des zu bewertenden Unternehmens. Sämtlichen an einer Unternehmensbewertung beteiligten Personen ist klar, dass man zukünftige Ein- und Auszahlungen nur ungefähr schätzen kann. Insofern handelt es sich dann aber auch bei den in Tab. 1 angegebenen Größen nicht um tatsächliche Zahlenwerte, sondern um deren Erwartungswerte. Was heißt das? Wenn Praktiker von Erwartungswerten sprechen, meinen sie „Zahlen, die man nicht so genau kennt“, weil sie mit dem mehr oder weniger groben Daumen geschätzt werden müssen. Das ist ungefähr so, als wenn jemand, der im Hochsommer nach der Temperatur am kommenden Tag gefragt wird, mit „ungefähr 28° Celsius“ antwortet, sich dann aber auch nicht besonders wundert, wenn es nachher nur 25° werden oder das Thermometer auf 30° klettert. Theoretiker nähern sich dem Thema etwas anders. In einem ersten Schritt zählen sie alle in Zukunft denkbaren Zustände der Welt auf. Diese Zustände müssen einander ausschließen und gleichzeitig aber auch vollständig sein. In einem zweiten Schritt werden diesen Zuständen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten können nun mit sehr einfachen Rechenverfahren die Erwartungswerte der Zufallsvariablen bestimmt werden. Bevor Theoretiker das allerdings tun, be-

schreiben sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung vollständig. Der Erwartungswert ist dann sozusagen nur eine einzige Kenngröße von vielen weiteren, die sich zur Charakterisierung einer Verteilung eignen. In der Praxis hat man für solch zeitraubende Tätigkeiten nicht die erforderliche Mühe. Bei der Unternehmensbewertung reduziert man die Komplexität daher gern in der Weise, dass man die Erwartungswerte der Cash-flows (und anderer relevanter Größen) direkt schätzt. Dagegen kann man kaum etwas sagen. Allerdings birgt das Verfahren auch Probleme, auf die wir nachfolgend eingehen.

Obwohl wir in Tab. 1 präzise Zahlen finden, muss inzwischen klar sein, dass alle dort aufgeführten Größen unsicher sind. Das bedeutet z.B., dass die Cash-flows in  $t = 1$  nicht genau 101 betragen, sondern eventuell im Bereich von 99 und 103 schwanken. Häufig geht man der Einfachheit halber davon aus, dass dabei jeder Wert innerhalb des Intervalls dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt. Man spricht dann auch davon, dass die Cash-flows gleichverteilt sind. Wir könnten unsere nachfolgenden Überlegungen mit dieser oder auch jeder anderen denkbaren Verteilungsannahme präsentieren, werden aber der leichteren Handhabbarkeit wegen unterstellen, dass wir es mit einer einfachen Binomialverteilung zu tun haben. Im Rahmen des Binomialmodells wird angenommen, dass die Cash-flows im Jahr 1 entweder den Wert 99 oder den Wert 103 mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen können, ein dritter Wert jedoch nicht möglich ist: Man muss sich klarmachen, dass also kein Bewerter damit rechnet, dass am Ende des ersten Jahres tatsächlich ein Cash-flow von 101 herauskommt. Es können nur die Werte 99 und 103 auftreten. Der Erwartungswert der Cash-flows im Jahr 1 ist dann genau  $\frac{1}{2} \times 99 + \frac{1}{2} \times 103 = 101$ .

Diese Erkenntnis hat Konsequenzen für die Berechnung der Marktwerte des Unternehmens. Wenn die zukünftigen Cash-flows in Wirklichkeit keine sicheren Größen, sondern Zufallsvariablen darstellen, müssen dann in den Gleichungen (1) und (2) nicht auch Intervalle (im Fall der Gleichverteilung) bzw. Zahlenpaare (im Fall der Binomialverteilung) statt einzelner Zahlen in den Zählern stehen? Und welche ökonomische Interpretation würde sich daraus ergeben?

### IV. Gegenwärtige und künftige Unternehmenswerte

Betrachten wir dazu zuerst den künftigen Wert des Eigenkapitals  $E_1$  aus Gleichung (2). Wenn die Cash-flows im Zähler schwanken, so gilt das auch für den Marktwert des Unternehmens in  $t = 1$ . Etwas anderes würde auch nur jemand behaupten, der sich noch nie mit den Realitäten der Bewertung vertraut gemacht hat. Das ökonomische Argument ist hier naheliegend: Der Marktwert  $E_1$  schwankt schon deshalb, weil er selbst eine Größe der Zukunft und damit unsicher ist. Gegenwärtig kann niemand mit Sicherheit wissen, wie hoch künftige Unternehmens-

2) Die Verwendung eines im Zeitablauf variablen Kapitalkostensatzes würde für das hier diskutierte Thema zu keinen anderen Ergebnissen führen.



werte sein werden. Z.B. könnte  $E_1$  im Fall einer Binomialverteilung entweder die Werte 937,59 oder 1406,38 annehmen, beides mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Wir hätten dann  $\frac{1}{2} \times 937,59 + \frac{1}{2} \times 1406,38 = 1171,98$ . Der Wert des Eigenkapitals  $E_1$  aus Gleichung (2) wäre dann als Erwartungswert anzusehen, von dem der Bewerter heute weiß, dass er im Zeitpunkt  $t = 1$  auf keinen Fall realisiert werden wird.

Wenden wir uns nun dem Unternehmenswert  $E_0$  aus Gleichung (1) zu. Schwankt auch dieser Wert in einem Intervall? Ist er ebenfalls unsicher? Man könnte diese Meinung vielleicht vertreten, wenn man bedenkt, dass die künftigen Cash-flows in Gleichung (1) keine Zahlen, sondern Intervalle oder Zahlenpaare sind. Nur kommt man jetzt mit dem Argument, es handle sich um einen zukünftigen und deshalb (!) unsicheren Unternehmenswert, nicht sehr weit. Der Unternehmenswert ist jetzt eine auf die Gegenwart bezogene Größe. Er kann genau so wenig unsicher sein wie das heute vorhandene Fremdkapital.

Man könnte noch mit einem anderen Hinweis zu begründen versuchen, dass der gegenwärtige Unternehmenswert unsicher ist: Der Bewerter besitzt zu wenig Information über das Unternehmen und deshalb ist der heutige Wert keine sichere Größe. Das hat dann aber nichts damit zu tun, dass sich eine betriebswirtschaftliche Größe zufällig innerhalb eines Intervalls bewegt, sondern mit dem Umstand, dass die mangelnde Fähigkeit des Menschen, in die Zukunft zu schauen, psychologisch so etwas wie Unbehagen oder Ungewissheit auslöst.

Der gegenwärtige Marktwert eines unsicheren zukünftigen Zahlungsstroms ist als diejenige Zahl definiert, die dem heutigen Wert dieses Zahlungsstroms entspricht. Bei einer solchen Bewertung findet nun nicht nur eine Zeit-, sondern auch eine Unsicherheitstransformation des Zahlungsstroms statt. Würde nur die Zeitdimension transformiert, dann müssten die Zahlungsströme ausschließlich mit den risikolosen Zinsen diskontiert werden. Wenn wir aber in Gleichung (1) die Kapitalkosten des Unternehmens verwenden, so heißt das auch, dass die unsicheren Zahlungen der (zukünftigen) Cash-flows in sichere (heutige) Zahlungen transformiert werden. Die betriebswirtschaftliche Logik verlangt schlicht und einfach, dass der gegenwärtige Unternehmenswert eine Zahl ist.

Es lässt sich festhalten: Gegenwärtige Unternehmenswerte sind eindeutige Zahlen, künftige Unternehmenswerte dagegen sind Zufallsvariablen. Wie ist diese Erkenntnis mit den Zahlen in Tabellen wie Tab. 1 auf S. 419 zu vereinbaren? Liegt hier ein unauflösbarer Widerspruch, gar ein Fehler vor? Das ist nicht der Fall. Man muss sich nur klarmachen, dass dort nicht tatsächliche, sondern erwartete freie Cash-flows angegeben sind, wenngleich das nicht explizit betont wird. Die Tatsache, dass künftige Unternehmenswerte im Gegensatz zu gegenwärtigen Unternehmenswerten Zufallsvariablen und keine Zahlen sind, hat nun aber Folgen.

## V. Falsch und richtig bestimmte Kennzahlen

Um ein Unternehmen bewerten zu können, muss eine Reihe betriebswirtschaftlich relevanter Größen bestimmt werden. Dazu gehören üblicherweise der Umsatz, eine Vielzahl von Auszahlungen (Personal-, Vertriebs-, Verwaltungsauszahlungen usw.), die Planung der Dividenden- und der Verschuldungspolitik, die anzuwendenden Unternehmenssteuersätze, um nur einige zu nennen. Konzentrieren wir uns auf die Verschuldungspolitik.

Im Zusammenhang mit den DCF-Verfahren ist bekannt, dass die Art und Weise der Verschuldungspolitik einen starken Einfluss auf den Unternehmenswert ausübt. Das hängt damit zusammen, dass eine höhere Verschuldung einen höheren Unternehmenswert zur Folge hat („Leverage Effekt“). Um nun den genauen Einfluss des Fremdkapitals auf den Unternehmenswert zu quantifizieren, unterscheidet man in der Literatur (mindestens) zwei verschiedene Varianten einer Verschuldungspolitik:

1. Im Fall einer autonomen Finanzierung wird angenommen, dass die zukünftigen Fremdkapitalmengen keine Zufallsvariablen sind, sondern unter allen Umständen festgeschrieben sind.
2. Im Fall einer marktwertorientierten Finanzierung wird angenommen, dass die zukünftigen Fremdkapitalquoten keine Zufallsvariablen sind, sondern unter allen Umständen festgeschrieben werden.

So sehr man sich über die Konsequenzen einer marktwertorientierten Finanzierungspolitik lustig machen kann, das darauf basierende Verfahren der gewichteten Kapitalkosten (auch WACC-Verfahren genannt) gilt heute als eines der wichtigsten DCF-Verfahren überhaupt. Deshalb gehört auch der Verschuldungsgrad zu einer wichtigen Kennzahl in der Unternehmensbewertung.

Eine Tabelle wie Tab. 1 auf S. 419 kann den Bewerter bei einer Kennzahl wie dem Verschuldungsgrad in die Irre führen. Konzentrieren wir uns dabei auf die Zeile „Tilgung“. Aus ihr ist ersichtlich, wie hoch die zukünftige Tilgung des Unternehmens sein soll. Da jedoch nichts darüber bekannt ist, ob das Unternehmen nun eine autonome oder eine wertorientierte Verschuldungspolitik verfolgt, ist nicht klar, ob es sich bei diesen Zahlen um sichere Größen oder aber um Erwartungswerte handelt. Und genau deswegen kann es zu einem Problem kommen.

Um das zu erkennen, unterstellen wir einmal autonome Finanzierung<sup>3)</sup>. Wir gehen also davon aus, dass die Manager des Unternehmens darauf dringen, dass das Unternehmen im Zeitpunkt  $t = 1$  unter allen Umständen einen Fremdkapitalbestand i.H.v.  $D_1 = 200$  haben soll. Es handelt sich jetzt um eine Zahl und keine Zufallsvariable. Dasselbe allerdings kann man weder von den zukünftigen freien Cash-flows noch von den zu-

3) Wir könnten das Problem, auf das es uns ankommt, auch bei wertorientierter oder anders gearteter Finanzierung beschreiben. Autonome Finanzierung ist also keine notwendige Voraussetzung für die Entstehung des Problems.



künftigen Marktwerten des Eigenkapitals behaupten. Diese bleiben Zufallsvariablen.

Nun zeigt sich jedoch, dass dann aber andere Überlegungen, die wir mit unserem Rechenbeispiel anstellten, inkonsistent werden. Im Rahmen von Gleichung (3) hatten wir den für den Zeitpunkt  $t = 1$  erwarteten Verschuldungsgrad mit

$$L_1 = \frac{200}{\frac{1}{2} \times 937,59 + \frac{1}{2} \times 1406,38} = \frac{200}{1171,98} = 0,1707 \quad (4)$$

bestimmt. Diese Rechnung verknüpft zwei Größen miteinander, und zwar den Marktwert des Eigenkapitals  $E_1$  und den zukünftigen Fremdkapitalbestand  $D_1$ . Weil wir jetzt wissen, dass es sich im ersten Fall nicht um eine Zahl, sondern um eine Zufallsvariable handelt, wollen wir die Rechnung hier noch einmal detailliert nachvollziehen. Zu diesem Zweck bestimmen wir zunächst die zustandsabhängigen Verschuldungsgrade und verdichten diese anschließend zu einem Erwartungswert. Auf diese Weise erhalten wir

$$\frac{200}{937,59} \approx 0,2133 \quad \text{und} \quad \frac{200}{1406,38} \approx 0,1422$$

und als erwarteten Verschuldungsgrad

$$L_1 = \frac{1}{2} \times 0,2133 + \frac{1}{2} \times 0,1422 \approx 0,1778 \quad (5)$$

ein ganz anderes Ergebnis als vorher! Die Abweichung ist zwar in unserem Beispiel nicht sehr groß. Trotzdem ist sie nicht etwa auf Rundungsfehler zurückzuführen, sondern hat systematische Gründe und könnte in anderen Zusammenhängen wesentlich stärker ausfallen. Welche Gründe sind das?

## VI. Wozu taugen Zahlenbeispiele (nicht)?

Der Fehler verbirgt sich darin, dass das Zahlenbeispiel die Unsicherheit der betrachteten Größen nicht korrekt reflektiert und wir das in unserer ersten Berechnung des erwarteten Verschuldungsgrads nicht hinreichend berücksichtigt haben. In der Definitionsgleichung des Verschuldungsgrads ist der Zähler bei autonomer Verschuldungspolitik eine sichere Größe, der Nenner aber unsicher<sup>4)</sup>. Unter diesen Bedingungen dürfen wir keine einfachen Durchschnitte bilden. Theoretisch arbeitenden Ökonomen ist dieser Sachverhalt als *Jensensche Ungleichung* bekannt<sup>5)</sup>. Aus ihr folgt: Der Erwartungswert eines Quotienten ist nicht gleich dem Quotienten des Erwartungswerts<sup>6)</sup>. Natürlich könnte es Situationen geben, in denen beide Größen durch Zufall übereinstimmen, aber davon können wir im Allgemeinen nicht ausgehen: Es würde ja auch niemand auf die Idee kommen, in dem Bruch

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

die Zahl sechs zu kürzen und dieses Vorgehen (obwohl im vorliegenden Beispiel zum richtigen Ergebnis führend) als mathematisch akzeptabel verteidigen. Wer also auf unsichere Quotienten schaut, darf nicht unüberlegt Erwartungswerte bilden – und sich demzufolge auch nicht einfach der Daten bedienen, die in unserer Tab. 1 auf S. 419 aufgeführt sind.

Welche Schlussfolgerung können wir aus unseren Überlegungen und Ergebnissen ziehen? Wir halten zwei Dinge für bedenkenswert:

- Jeder, der ein Zahlenbeispiel wie in Tab. 1 auf S. 419 präsentiert, sollte sich und den Lesern klar vor Augen führen, dass er die Unsicherheitskomponente in der Unternehmensbewertung unterdrückt. Wenn es sich um eine Bewertung in einem sicheren Umfeld handelt, ist das kein Problem. Wo aber Unternehmenswerte unter realistischen Bedingungen zu bestimmen sind, ist diese Vereinfachung so gravierend, als würden wir bei der Zeitdimension in einem Zweiphasenmodell die ewige Rente ausblenden.
- Bei der Unternehmensbewertung geht es nicht nur um die Ermittlung des Marktwerts selbst, sondern es ist auch die Bestimmung einer Vielzahl wichtiger Kennzahlen notwendig. Einige wichtige Kennzahlen können aber mit dem Material, das in Beispielstabellen wie Tab. 1 auf S. 419 abgebildet wird, nicht korrekt ermittelt werden.

Wir halten daher die bloße Angabe erwarteter Cash-flows und erwarteter Fremdkapitalmengen wie in Tab. 1 auf S. 419 für sehr bedenklich. Man wird perspektivisch nicht umhin kommen, auch in der Unternehmensbewertung die zugrunde liegende Unsicherheit der Kenngrößen des Unternehmens darzustellen. Konkret bedeutet das: Ein Unternehmensbewerter, der z.B. daran interessiert ist, mit korrekten künftigen Verschuldungsgraden zu rechnen, ist auf mehr Informationen angewiesen als aus Tab. 1 auf S. 419 entnommen werden können. Er braucht in Bezug auf unsichere betriebswirtschaftliche Größen nicht nur deren Erwartungswerte, sondern etwas genauere Angaben über deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen. In der Literatur gibt es hierfür vereinzelt bereits Ansätze<sup>7)</sup>, die natürlich einen höheren Informationsbeschaffungs- und Rechenaufwand verursachen als einfache Tabellen.

## VII. Zusammenfassung

In letzter Zeit sind viele Arbeiten zum Thema Unternehmensbewertung und DCF-Verfahren veröffentlicht worden. Sehr oft werden dabei Zahlenbeispiele präsentiert. Jedoch ist die Art und Weise, wie in diesen Beispielen typischerweise die Unsicherheit berücksichtigt wird, meistens fragwürdig.

4) Bei wertorientierter Finanzierung wären sowohl der Zähler als auch der Nenner unsicher.

5) Vgl. z.B. Bamberg/Baur, Statistik, 12. Aufl. 2002. Eine anschauliche Beschreibung sowie Hinweise auf den bemerkenswerten Lebenslauf des dänischen Ingenieurs und Freizeit-Mathematikers Jensen (1859 – 1925) findet man unter <http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/marken/briefmarke0311.htm>.

6) In formaler Darstellung heißt das  $\frac{1}{E[\bar{x}]} \neq E\left[\frac{1}{\bar{x}}\right]$  wobei  $\bar{x}$  eine Zufallsvariable ist und  $E[\cdot]$  den Erwartungswertoperator repräsentiert. Wir hatten oben darauf hingewiesen, dass weder der konstante Kapitalkostensatz noch die autonome Finanzierungspolitik verantwortlich dafür sind, dass das von uns dargestellte Problem entsteht. Ursache für das Problem ist allein die Tatsache, dass es sich bei  $f(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}}$  um eine konvexe Funktion handelt.

7) Vgl. z.B. Richter, Schmalenbach Business Review 54/2002 S. 136-147 sowie Kruschwitz/Löffler, in: Richter/Schüler/Schwetzler (Hrsg.), FS Drukarczyk, S. 235-253.